Des ressources pour le professeur : présentation d'un site sur l'enseignement de l'algèbre au collège

Sylvie Coppé

SYLVIE COPPÉ

DES RESSOURCES POUR LE PROFESSEUR : PRESENTATION D'UN SITE SUR L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGEBRE AU COLLEGE

Abstract : The aim of this workshop was to present a website which proposes resources for mathematics teachers and trainers. The website is designed by teachers and researchers working together ; it aims at improving the teaching of algebra and fostering a rich mathematical activity for students.. The most important question for the site designers is to determine initial resources they can use, and the environment they can build around these initial resources to favor their appropriation by teachers.

Dans cet atelier, nous souhaitons présenter une recherche menée par des chercheurs et des enseignants volontaires sur l'enseignement de l'algèbre au collège en France (élèves de 11 à 16 ans) qui a pour but d'élaborer des ressources pour les professeurs des mathématiques et les formateurs et de les diffuser sur un site en construction (SESAMES Algèbre), consultable à l'adresse suivante : http://www.lyon.iufm.fr/UCDmath/algebre/index.htm.

Nous travaillons dans le cadre d'un projet de recherche pluridisciplinaire (associant les mathématiques, les sciences physiques et la chimie) qui vise à améliorer l'articulation entre pratiques des professeurs et activités des élèves, par le biais de la diffusion de ressources, qui peuvent être des séances de classe, mais pas seulement, dans le cadre des programmes actuels de ces différentes disciplines. Nous avons choisi une diffusion par site web pour permettre d'une part, un travail de conception des ressources évolutif, avec des possibilités de modifications, des ajouts (ou des retraits), une évolution de l'architecture du site et d'autre part, la création de liens avec les utilisateurs, voire de collaborations.

Ce que nous présentons ici est donc le résultat d'un travail en évolution et d'une recherche en cours.

Dans la première partie, nous donnerons des éléments sur le fonctionnement général du groupe de recherche, puis nous nous apporterons quelques éléments sur « ressources/documents ». Nous rappellerons ensuite quelques résultats sur la didactique de l'algèbre, nous ferons une analyse des programmes actuels du collège et des manuels qui nous sert dans l'élaboration des divers documents que nous proposons sur le site. Enfin, nous présenterons le site et nous commenterons deux types de documents élaborés et mis en ligne.

QUELQUES ELEMENTS SUR LE FONCTIONNEMENT DU GROUPE

Un projet de recherche pluridisciplinaire

Actuellement cinq groupes thématiques, comprenant chacun des chercheurs et des professeurs travaillent dans ce projet (algèbre au collège, sciences physiques au collège, sciences physiques au lycée, chimie au lycée, pluridisciplinaire lycée). Le travail mené dans les groupes se fait à plusieurs niveaux :

- conception d'activités ou de séances de classe (voire de séquences de classe), qui sont expérimentées puis rédigées selon un canevas défini,
- conception du site, de son architecture,
- élaboration et classification des documents autres que les séances de classe,
- à plus long terme, un autre niveau serait d'étudier comment les professeurs utilisent ces ressources et quels effets cela pourrait avoir sur leur pratique.

Bloch I. et Conne F. (eds.), *Actes de la XIVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques*, pp. 1 – 20. © 2008 – La Pensée Sauvage – Editions.

Chaque groupe se réunit au moins deux fois par mois pour discuter des propositions de chacun sur les points cités ci-dessus et pour finaliser les documents qui sont alors mis sur le site.

En plus, nous organisons des réunions plénières dans lesquelles chaque groupe présente l'avancée de ses travaux. Nous dégageons également des questions communes qui sont alors reprises, rediscutées et travaillées dans les groupes. Actuellement, nous travaillons sur la question des liens entre activités, synthèse, mise en commun, institutionnalisation et nous étudions comment chacun des groupes prend en compte cette question dans l'élaboration des ressources.

Fonctionnement du groupe Algèbre au collège

Ce groupe est actuellement constitué d'une chercheuse en didactique des mathématiques, de cinq professeurs de collège volontaires (recrutés lors de stages par exemple) et d'un doctorant. Nous bénéficions du soutien de l'INRP.

Les questions de recherche que nous nous posons sont les suivantes :

- Que peut-on appeler des ressources pour les professeurs ? De quoi peuvent-elles être constituées ? Comment favoriser l'appropriation de ces ressources afin qu'elles deviennent des documents pour le professeur ?
- Quelle architecture du site faut–il proposer ? Notamment comment gérer une trop grande différence par rapport aux manuels scolaires qui proposent des chapitres séparés, sur des thèmes mathématiques proches de ceux énoncés dans les programmes alors que nous proposons plutôt une entrée par des types de problèmes ?
- Si nous considérons qu'il ne suffit pas de donner simplement des textes de problèmes, un peu comme dans les manuels, quels autres types de documents peut-on produire, donner à voir ? Sur quels supports ?
- Quels écrits théoriques doit-on donner ? Nous utilisons en particulier des résultats de recherche en didactique de l'algèbre, mais pas seulement puisque nous souhaitons aussi expliciter nos choix de gestion de classe qui relèvent d'autres champs.
- En ce qui concerne les séances de classe mises sur le site, quel doit être le niveau de description, d'explicitation de la gestion de la classe, du détail des consignes, etc ?
- A plus long terme, comment favoriser une collaboration entre les concepteurs du site et les utilisateurs ?

Depuis 6 ans, le travail essentiel du groupe a consisté en la mise en place du site et de son architecture et à l'élaboration des différents documents qui le constituent.

La première élaboration du site a été faite par la chercheuse et un professeur. C'est à ce moment que nous avons rédigé une première version des principes qui s'est ensuite stabilisée mais qui sera certainement reprise dans les mois qui viennent. Ensuite, au fil des années (notamment en fonction des moyens alloués), d'autres professeurs ont rejoint le groupe. Au début, ceux-ci participaient activement aux discussions, mais n'élaboraient pas d'activités ; en revanche ils apportaient des documents personnels qu'ils utilisaient dans leurs classes. Puis, assez vite, nous avons pu constater une participation plus active à l'élaboration et à la rédaction des documents, puis à des propositions de thèmes à travailler et enfin à la question de la diffusion et de l'appropriation des documents, ce qui a relancé notre questionnement sur la nature et la forme des documents à proposer, leur niveau de description ou d'explicitation. Ainsi, nous avons eu une évolution assez rapide des questions abordées et des méthodes de travail. Les professeurs de ce groupe soulignent l'intérêt d'avoir eu les principes pour leur entrée dans le groupe. Cependant, ce n'est qu'au bout de quelques années de travail qu'ils commencent à les discuter.

La construction des activités est faite en plusieurs étapes : détermination de l'idée d'un problème, élaboration d'un premier scénario de mise en œuvre dans la classe, expérimentation dans une ou plusieurs classes, retour sur le problème et le scénario, ajustement des variables, des questions, des synthèses, puis rédaction pour le site. Chaque fois qu'une activité est expérimentée, nous photocopions des copies d'élèves ou nous filmons la séance. Quand les modifications ont été faites, un membre du groupe la rédige selon le canevas que nous présentons plus loin. Nous décidons également des autres documents que nous mettons sur le site et nous procédons de la même façon : un membre du groupe fait une première rédaction qui est discutée avant d'être mise sur le site. Les réunions servent donc avant tout à donner des orientations, à discuter les versions finales des documents et à répartir le travail.

LA DISTINCTION RESSOURCES DOCUMENTS

Nous reprenons la distinction de Gueudet et Trouche, (dans ce volume) entre ressources et documents et notamment l'idée de transformation :

> « Nous considérons le professeur comme un sujet capable, disposant de ressources (artefacts). Ces ressources sont transformées dans l'activité de l'enseignant en documents (instruments) par des processus de genèse expérimentale » (Gueudet et Trouche, 2008)

Ainsi, parmi toutes les ressources que l'on peut trouver à différents endroits et sous des formes différentes (et avec le développement des TIC celles-ci risquent de se développer rapidement) certaines deviendront des documents que le professeur pourra utiliser, et ceci grâce à un travail de transformation et d'appropriation qu'il est important d'étudier.

Cependant, en ce qui nous concerne, le terme document est utilisé à deux moments différents : les concepteurs du site produisent des documents de divers types qui sont rédigés, classés, organisés pour être diffusés sur le site et donc, pour devenir (éventuellement) des ressources pour les enseignants ou les formateurs. A leur tour, ces derniers peuvent les transformer en documents de divers types. Par exemple, les séances de classe peuvent être utilisées directement, sans transformation (mais peuvent aussi être adaptées) alors que les écrits théoriques resteront à disposition des professeurs et leur serviront à accroître leurs connaissances professionnelles. De même, les procédures d'élèves servent à documenter le professeur sur ce que les élèves peuvent faire. Ainsi, à partir des ressources, les documents élaborés par les professeurs ne sont pas tous du même type et n'ont pas la même fonction : certains sont davantage pour le professeur et d'autres sont plus directement utilisable en classe (nous emploierons à ce sujet le terme « documents pour la classe ».

Pour illustrer cela, nous avons fait un tour d'horizon rapide des types de ressources et des exemples de différentes utilisations qui peuvent être faites.

- Les programmes et les documents d'accompagnement (désignés comme tels selon le terme officiel) : ce sont des écrits officiels qui donnent des indications plus ou moins précises, voire des injonctions sur ce que le professeur doit faire à la fois du point de vue du savoir et de celui des méthodes d'enseignement. Notons que, dans les documents d'accompagnement, on trouve quelques problèmes qui peuvent être mis en œuvre dans les classes. La plupart de ces écrits doivent être intégrés, pris en compte dans le travail du professeur notamment lors de la préparation des séances de classe. Pour nous, les programmes peuvent constituer des documents pour le professeur et ils peuvent aider à la constitution de documents pour la classe.
- Les manuels scolaires : ce ne sont pas des écrits officiels mais ils peuvent avoir ce statut pour les professeurs, ils proposent des cours, des exercices ou des activités d'introduction (nous reprenons ce terme qui est actuellement employé pour désigner des types d'exercices qui sont proposés en début de chapitre, qui ont pour but d'introduire les notions enseignées, et de distinguer les exercices proposés avant et

après institutionnalisation) qui peuvent être utilisés directement dans la classe ; cependant les manuels donnent rarement des indications sur la gestion de la classe (ordre, durée, travail personnel, de groupe, etc) qui peut être faite. De plus, en reprenant les termes de Chevallard, 1998, 1999, on peut déterminer dans les manuels une organisation mathématique (par exemple en termes de succession des chapitres) mais pas une organisation didactique. Nous avons montré (Coppé, 2007) que les exercices proposés dans les manuels étaient souvent utilisés tels quels, sans modification, notamment des variables didactiques qui souvent, ne sont d'ailleurs pas identifiées. On peut donc penser que, si certains éléments proposés dans les manuels peuvent être repris sans modification pour devenir des documents pour la classe, le professeur a à sa charge de construire une organisation didactique qui lui permette d'intégrer ces éléments à sa préparation dans le cadre de ses pratiques habituelles.

- Des fiches d'activités « clés en main » que l'on peut trouver sur Internet sur des thèmes particuliers. Ces écrits ont la même fonction que ceux des manuels, cependant ils sont souvent moins organisés (ils ne proposent pas forcément d'organisation mathématique, de cours, etc).
- Des fiches d'activités que chaque professeur a élaborées personnellement ou bien avec ses collègues (et que le professeur conserve). Elles constituent un type de ressources qui n'ont pas un caractère officiel car ce sont des documents personnels qui sont échangés. Ils peuvent être des documents pour certains professeurs et constituer des ressources pour d'autres. Ils sont essentiellement constitués de documents pour la classe.
- Les livres « savants » qui peuvent être des livres portant sur le savoir mathématique ou bien des livres qui traitent de sujets plus généraux relatifs à l'enseignement, aux élèves, aux adolescents, etc. Ces livres ont plutôt une fonction de documentation qui permet aux professeurs de compléter, d'approfondir leurs connaissances personnelles et professionnelles et ainsi, éventuellement, de modifier leur pratique.
- Des articles qui proviennent de revues professionnelles. Par exemple, pour les mathématiques, on peut citer la revue de l'APMEP ainsi que les fascicules, les brochures IREM, les revues Petit x, Grand N, Tangente, etc. Dans ces revues, on peut trouver des articles de réflexion sur des thèmes mathématiques qui peuvent comporter des idées d'activités à mettre en œuvre dans les classes. Cependant, les activités, évoquées ou proposées, sont souvent à replacer dans leur contexte et elles ne peuvent pas être utilisées sans modification pour la classe. En revanche, ces articles proposent des analyses des activités proposées, ils peuvent donner à voir des productions d'élèves et peuvent être complétés par d'autres types d'observables, questionnaires, etc. Ainsi ces articles peuvent constituer des éléments de documentation pour les professeurs, ils peuvent participer à la constitution de documents mais un travail de remise en forme, d'adaptation à la classe est à faire pour cela. Enfin, comme précédemment, ils permettent aux professeurs d'approfondir les connaissances professionnelles.

Nous avons donc vu la multiplicité des ressources documentaires qu'un professeur peut avoir à sa disposition. Nous avons tenté de montrer que ces ressources avaient des fonctions, des formes, des supports différents et qu'un travail quelquefois important devait être fait par le professeur pour les transformer en documents notamment pour la classe.

QUELQUES CONSTATS DE DEPART SUR L'ALGEBRE AU COLLEGE

Nous sommes partis d'un premier constat selon lequel les élèves de 2^{nde} (élèves de 15-16 ans) semblent avoir des difficultés importantes pour mobiliser leurs connaissances algébriques pour résoudre des problèmes (c'est, par exemple, une plainte constante des professeurs de lycée). En particulier, il semble que les élèves des classes de $3^{ème}$ (élèves de 14-15 ans) ou de 2^{nde} ont du mal à introduire une lettre dans un problème si on ne la leur donne pas (Coulange, 2000). Ceci provient certainement du fait que, d'une part, l'aspect modélisation est peu mis en avant actuellement lors de l'introduction de l'algèbre élémentaire et que, d'autre part, les types de tâches portant sur l'aspect purement technique du calcul algébrique prennent le pas sur d'autres types de tâches qui donneraient du sens à la pratique algébrique. Enfin nous pensons que les notions algébriques sont plutôt enseignées comme des objets que comme des outils notamment de modélisation (Grugeon, 1995).

Des études théoriques sur l'algèbre élémentaire

Des nombreuses études ont été faites sur l'analyse de ce savoir mathématique, nous ne les reprenons pas toutes en détail, nous pointons rapidement celles que nous utilisons dans notre travail sur la conception du site.

Vergnaud, 1989 indique les différentes entrées dans l'algèbre dont nous pensons qu'elles ne sont pas forcément toutes reconnues comme telles, notamment dans les manuels.

> « Par "introduction à l'algèbre", on peut entendre plusieurs choses distinctes :
>
> - mise en équation de problèmes arithmétiques simples et résolution par l'algèbre ;
> - règles élémentaires de traitement et de transformation des équations ;
> - première explicitation des concepts de fonction et de variable ;
> - mise en évidence de certaines propriétés structurales des ensembles de nombres, notamment l'ensemble des relatifs et de l'ensemble des rationnels ;
> - etc…
>
> Il est raisonnable de penser que c'est un savant équilibre de ces différentes composantes conceptuelles et des situations qui leur donnent du sens qui peut permettre aux élèves de comprendre en profondeur la fonction, la structure et le fonctionnement du raisonnement algébrique. Mais quel équilibre ? »

Des études portent sur l'articulation, en termes de ruptures et de continuités, entre l'arithmétique et l'algèbre (Vergnaud, 1988, 1989, Chevallard, 1985bis, 1989, 1990 ou Gascon, 1994). Ainsi ils indiquent que souvent l'algèbre élémentaire est assimilée à une arithmétique généralisée dans le sens où le symbolisme algébrique serait seulement un prolongement et une généralisation du langage arithmétique. Or selon eux, ce n'est pas le cas car les symboles employés (lettres, signe égal, signes opératoires, etc) n'ont pas le même statut et que les types de problèmes que l'algèbre permet de résoudre qui sont différents.

D'autres travaux ont porté sur les statuts de ces différents objets comme ceux de Kieran, 1990, Schmidt, 1996, et enfin d'autres sur les erreurs (Behr et al., 1980, Booth, 1985, Drouhard, 1992, Grugeon, 1995 et Kirshner et al., 2004).

Vergnaud, 1989 a distingué les procédures arithmétiques et algébriques dans la résolution des problèmes (repris par Schmidt et al, 1997).

> « Alors que la résolution arithmétique d'un problème en langage naturel consiste à rechercher les inconnues intermédiaires dans un ordre convenable, et à choisir les données et les opérations adéquates pour calculer ces inconnues, l'algèbre consiste à écrire des relations explicites entre inconnues et données, et à s'en remettre ensuite à des procédures de traitement relativement automatiques pour trouver la solution. Il faut ainsi renoncer à calculer les inconnues intermédiaires, et éviter de se préoccuper du sens des grandeurs exprimées à tel ou tel moment de la résolution algébrique. » (Vergnaud, 1989).

Enfin, quelques études plus récentes prennent en compte la situation de classe et le professeur comme dans les thèses de Coulange, 2000 ou Lenfant, 2002.

Etude des programmes du collège (BO n°6 du 19 avril 2007)

En France, depuis quelques années, les programmes de mathématiques du collège ne sont pas développés de façon linéaire comme ils ont pu l'être à d'autres époques notamment au moment de la réforme des mathématiques modernes. Un même notion est vue et revue à différents moments et complétée chaque année. De nouveaux types de tâches apparaissent admettant des techniques différentes (c'est le cas pour la résolution d'équations) ou bien la palette des objets étudiés est enrichie (les nombres entiers puis relatifs) ou encore d'autres aspects d'une même notion sont pris en compte (par exemple, les fractions peuvent être vues comme des nombres ou comme des opérateurs). Cette construction des programmes a certainement des avantages (pouvoir revenir plusieurs fois et avec des regards différents sur une même notion) mais elle favorise aussi une certaine dispersion des notions et peut empêcher de faire les liens entre les notions abordées ou leur utilisation : par exemple, sur le calcul algébrique, on n'aborde pas en même temps développement et factorisation. Ainsi la distributivité de la multiplication sur l'addition est vue en classe de 5ème, le développement des expressions littérales est explicitement au programme de la classe de 4ème et la factorisation de celle de 3ème.

De plus, chaque année, les quatre grands thèmes suivants organisent l'étude et on peut repérer dans chacun de ces paragraphes des notions qui relèvent de l'algébrique.

1. Organisation et gestion de données, fonctions
2. Nombres et calculs
3. Géométrie
4. Grandeurs et mesures.

Par exemple, en classe de 5ème, on trouve dans la première partie des références aux fonctions, à la notion de variable et aux expressions littérales *« utiliser et produire une expression littérale »* et dans la partie 2, des indications sur les règles de calcul littéral. A travers cet exemple, on peut donc voir, d'une part que les notions algébriques sont disséminées dans les différentes parties et que d'autre part, le calcul littéral étant inclus dans la partie « Nombres et calculs », il semblerait que celui-ci serait vu comme la généralisation du calcul numérique, ce qui tendrait à prouver que la question de la rupture entre arithmétique et algèbre n'est pas prise en compte.`

> Partie 1 « Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur, toute autre variable étant fixée, par exemple dans le cas :
>
> - de la longueur d'un arc de cercle
> - de l'aire d'un triangle, d'un parallélogramme, d'un disque, d'un secteur circulaire
> - du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit. »
>
> Partie 2 : « Sur des exemples numériques ou littéraux, utiliser les égalités k(a -+b) = ka + kb et k(a -b) = ka – kb dans les deux sens. »

Enfin, jusqu'à présent les processus de preuve en algèbre étaient peu mis en avant, cependant, il semble que les concepteurs des programmes aient pris conscience de ce fait puisqu'on trouve dans les nouveaux programmes de 4ème une injonction à l' « *Utilisation du calcul littéral pour prouver un résultat général* ».

Etude des manuels scolaires

Nous avons analysé six manuels des classes de 5ème (année 2006) et de 4ème (année 2007) et nous avons repris les résultats de El Mouhayar, 2007 (sur les manuels de 5ème et 4ème des années 2001 et 2002). Ces deux études montrent le même phénomène de dispersion des notions algébriques dans les chapitres des manuels. Par exemple, en classe de 5ème, dans la plupart des manuels, le premier chapitre est consacré aux règles de calcul et aux priorités opératoires sur les nombres décimaux positifs et on voit apparaître à la fin une partie consacrée au calcul littéral, dans laquelle on manipule des expressions littérales sans avoir justifier la nécessité d'introduire une lettre.

Nous avons également constaté un déficit de ce que nous appelons des tâches unificatrices qui monteraient notamment le caractère outil de modélisation de l'algèbre. L'étude précédente de El Mouhayar montre qu'en calcul littéral, suivant la forme de l'expression littérale, on n'emploie pas la même consigne pour les types de tâches de développement : on peut trouver notamment « développer », « réduire », « supprimer les parenthèses ».

De plus nous avons repéré un grand nombre de tâches peu finalisées qui donnent certainement aux élèves l'impression que l'algèbre se réduit à un travail technique sans but. Par exemple, « Tester une égalité » explicitement désigné dans les programmes de la classe de 5ème, devient un type de tâches à part entière. Or nous pensons que cela devrait correspondre plutôt à une incitation à employer des procédures de vérifications (Coppé, 1993). Ainsi, il nous semble que travailler sur les vérifications permet, au-delà de savoir si les résultats sont plausibles pour l'élève, de donner du sens notamment à la notion de variable (Chalancon et al., 2002).

Il y a peu d'indications sur des éléments théoriques qui justifieraient les techniques. Les théorèmes et les règles ne sont pas mis en avant. De plus, les propriétés sont présentées sans quantificateurs ce qui ne permet pas aux élèves de bien connaître leur domaine de validité. Ceci est particulièrement vrai pour la propriété de distributivité qui est présentée au mieux comme une règle et au pire sans indications (seul le fait qu'elle soit encadrée peut donner l'idée aux élèves que c'est une propriété importante). Enfin nous avons constaté qu'un nombre important d'objets paramathématiques (au sens de Chevallard, 1985) comme « expression littérale, égalité, équations, expressions égales, développer, factoriser ou réduire » sont introduits avec des définitions qui ne semblent pas permettre de donner des éléments de validation des réponses et des procédures. C'est le cas de la définition *« Réduire une expression littérale, c'est l'écrire avec le moins de termes possible »* que l'on trouve dans plusieurs manuels. Il y a donc selon nous, un déficit d'éléments théoriques au niveau de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège.

La plupart des problèmes se rencontrent dans le chapitre sur les équations. Or, on peut constater que les problèmes posés aux élèves ne nécessitent pas toujours le recours à l'introduction d'une équation, car ils peuvent facilement être résolus par d'autres méthodes notamment arithmétiques. Enfin, la plupart du temps, on indique quelle est l'inconnue qui doit être introduite sous la forme « appelle x… ». Voici un exemple assez fréquent d'un problème qui ne nécessite pas une mise en équation :

> Je pense à un nombre, je lui ajoute 34, je multiplie par 7 le résultat et je trouve 112. Quel était le nombre de départ ?

Ce problème peut être facilement résolu par une procédure qui consiste à "remonter" les calculs 112 : 7 = 16 et 16 – 34 = -18. Ainsi, on voit bien que l'introduction d'une lettre et d'une équation n'est pas une procédure indispensable pour cet exercice. Or, ce type d'exercice est souvent celui choisi par les manuels pour introduire les équations. Enfin, très souvent les nombres qui interviennent dans les problèmes sont des entiers et la solution est souvent, elle aussi, un nombre entier peu élevé, ce qui permet et renforce des procédures par essais peu coûteuses.

De la même façon, concernant les systèmes d'équations, Coulange, 1997 a montré une grande uniformité sur la forme des problèmes qui peuvent être résolus par un système qui entraîne des effets de contrat importants et qui laisserait penser que mettre en équation se fait comme une simple traduction pas à pas de l'énoncé.

Une étude sur la préparation des séances de classe

Nous avons fait une étude sur la façon dont les professeurs de mathématiques stagiaires de collège et de lycée en fin de formation initiale préparaient leurs séances de classe (Coppé 2007). Pour cela nous avons utilisé la technique de l'entretien d'explicitation qui vise à faire raconter comment un professeur a préparé un cours donné et situé dans le temps. Cette étude, qui partait de l'hypothèse que pour préparer leurs séances de classe, les professeurs devaient mobiliser et articuler diverses connaissances relevant de différents types (voir Schulman, 1986) avait pour but de mettre en évidence des régularités et des divergences chez les professeurs interrogés. Nous avons montré que :

- les professeurs ont développé une connaissance importante des programmes qu'ils utilisent pour leur travail de préparation,
- leurs connaissances mathématiques sont utilisées dans un but de résolution d'exercices mais assez peu pour l'élaboration d'activités pertinentes pour les apprentissages des élèves,
- des éléments de connaissances didactiques peuvent être relevés dans le discours,
- les connaissances portant sur les élèves sont prises en compte de façon différente suivant les professeurs et, cela certainement en fonction du public.

Plus particulièrement, nous avons mis en évidence le rôle primordial des manuels et leur utilisation particulière. Ainsi, il semblerait que le travail de préparation consiste à choisir parmi quelques (voire de nombreux) manuels (ou Internet) un plan, des parties de synthèse ou des activités (pas forcément dans cet ordre, la recherche d'activités pouvant précéder celle de la synthèse) qui conviennent en fonction de critères portant majoritairement sur la forme, la clarté. On pourrait comparer ce travail à la réalisation d'un puzzle dans lequel on agence des pièces déjà fournies sans les modifier.

Ce dernier point nous paraît important pour l'élaboration du site. Ainsi, les professeurs interrogés reprennent tels quelles les parties de cours ou les exercices sans se donner le droit de les modifier. Or, on peut penser que les connaissances mathématiques des professeurs leur permettraient de le faire. Il y a donc d'autres raisons qui nous permettent d'interpréter ce phénomène : le rapport aux livres dans la vie courante qui ne favoriserait pas le droit de modification d'une œuvre ou bien l'idée que les manuels scolaires ont un caractère institutionnel qui empêcherait leur remise en cause ou enfin la représentation du métier de professeur qui n'intègrerait pas l'idée de créer des exercices.

Conclusion

Ces analyses nous conduisent à penser que l'enseignement de l'algèbre au collège semble peu problématisé, qu'il est souvent rabattu sur de la technique algébrique, que les éléments technologico-théoriques sont absents ou peu identifiés, que les questions de continuité et rupture entre arithmétique et algèbre sont peu prises en compte, que les erreurs des élèves sont peu reconnues et analysées par les professeurs. Il y a un risque que, dans les classes, les professeurs suivent le découpage des manuels, ne proposent pas des problèmes où le caractère outil de modélisation ou de preuve est mis en avant ne prennent pas en compte les questions de validation ou de vérification.

Enfin, l'étude sur la préparation des séances de classe montre que si nous voulons que les ressources du site deviennent opérationnelles pour les professeurs, il est nécessaire soit de ne pas rompre trop fortement avec l'utilisation qui est faite des manuels, soit de donner des explications qui permettent de comprendre pourquoi nous ne faisons les mêmes choix et comment on peut utiliser les scénarios proposées notamment pour favoriser l'activité des élèves.

PRESENTATION DU SITE

Les documents élaborés et diffusés sur le site visent donc à permettre aux professeurs de mettre en place des activités dans les classes prenant en compte ces différentes questions. Cependant, nous pensons qu'ils ne doivent pas se réduire, comme dans les manuels, aux textes des problèmes. Nous avons donc rajouté d'autres documents :

- une liste de sept principes qui guident nos choix d'activités à mettre en œuvre dans les classes,
- des écrits théoriques que nous rédigeons provenant notamment des travaux de recherche sur l'algèbre,
- des analyses de programmes,
- des éléments concernant les contenus,
- des éléments concernant la gestion de la classe,
- une bibliographie des travaux sur l'algèbre,
- des activités à mettre en œuvre dans les classes,
- des propositions de séquences de classe (plusieurs activités enchaînées),
- très récemment, des propositions de plan et d'enchaînement des activités proposées par classe.

L'entrée dans le site peut se faire à plusieurs niveaux : par les principes, par des thèmes mathématiques et par les activités ou par niveau de classe.

Dans les propositions d'activités pour la classe, nous présentons les problèmes en dégageant clairement leur(s) objectif(s) et nous justifions certains choix de variables didactiques. Nous les situons par rapport aux principes, nous faisons des propositions de déroulement (scénario de classe), nous donnons des descriptions de procédures d'élèves et des prolongements possibles. Tous ces commentaires doivent permettre au professeur de s'approprier le problème posé avec toutes ses caractéristiques, notamment les choix des variables didactiques et des éléments de gestion de classe. Les descriptions de procédures d'élèves (dont la plupart ont été observées dans les classes) doivent permettre au professeur de mieux comprendre les enjeux des activités proposées et d'anticiper les réactions des élèves. Ainsi, pour chaque activité, nous rédigeons une fiche sur le modèle suivant :

- Texte du problème
- But, objectif, lien avec les principes
- Mise en œuvre
- Analyse du problème et des choix faits
- Institutionnalisation possible
- Productions, réponses possibles des élèves
- Prolongements possibles.

L'explicitation des liens de chaque activité avec les principes doit permettre à la fois une meilleure appropriation de ceux-ci et de mieux comprendre comment des éléments théoriques peuvent être pris en compte dans la conception de séances de classe.

Donner à voir des réponses ou des procédures d'élèves doit favoriser une meilleure compréhension de la tâche et surtout inciter le professeur « utilisateur du site » à essayer de proposer les séances de classe.
Nous proposons systématiquement des prolongements aux problèmes initiaux. Cela permet d'enrichir le problème mais également de favoriser les liens entre différentes notions. Par exemple, pour les activités qui figurent dans la rubrique « Introduction de la lettre », nous choisissons des problèmes qui nous permettent de produire, de vérifier, puis d'utiliser des expressions littérales pour résoudre des équations par exemple. Dans ce sens, nous sommes en rupture avec les manuels scolaires qui proposent des tâches plus isolées.

Présentation des principes

Voici les sept principes énoncés qui nous paraissent essentiels pour permettre un enseignement de l'algèbre qui montre aux élèves l'utilité et la force de l'outil algébrique. Ceux-ci sont de deux types : 1 et 3 sont plus généraux, ils concernent tout l'enseignement des mathématiques au collège et au lycée ; les autres sont plus spécifiques à l'algèbre. Nous présentons en Annexe 1 le texte qui est sur le site, il est complété par un texte plus long (rubrique « En savoir plus ») qui explicite certains points.

1 - Proposer aux élèves des problèmes dans lesquels l'emploi des lettres (ou autre symbole) paraît sinon indispensable mais utile, performant pour résoudre le problème.

Ce premier principe général se fonde sur l'idée que l'on construit ses connaissances en résolvant des problèmes pour lesquels nos connaissances anciennes se révèlent insuffisantes ou inadaptées, et nécessitent la création de nouveaux outils qui seront, à leur tour, transformés en objets de connaissance dans le cadre de l'enseignement. Nous pensons que ce jeu entre, d'une part, connaissances anciennes et nouvelles et, d'autre part, entre le statut d'outil pour résoudre des problèmes et d'objet de connaissance se révèle à la base de notre enseignement actuel en France mais qu'il a du mal à se traduire de façon effective dans les classes. On retrouve là, bien sûr, des fondements de la didactique des mathématiques (Brousseau, 1989, Douady, 1989)

2 – Ne pas désigner trop tôt les quantités inconnues ou variables par une (ou des) lettre(s). Laisser les élèves ressentir la nécessité de leur introduction plutôt que de les donner a priori.

Nous avons montré dans l'analyse des manuels que souvent les problèmes proposés aux élèves ne nécessitaient pas l'utilisation de l'outil algébrique, notamment dans le cas des équations ou inéquations. Ce principe constitue la suite du précédent mais il est adapté au contenu mathématiques. Nous avons voulu aller contre une tendance actuelle à découper les problèmes et à les rendre très fermés (Betton et Coppé, 2005), ce qui est particulièrement vrai dans le cas des équations et des fonctions. A travers ce principe, nous voulons aussi pointer les spécificités et les différences entre le raisonnement algébrique et le raisonnement arithmétique afin, d'une part, de laisser les élèves mettre en place différents types de raisonnement et, d'autre part, de trouver des problèmes qu'on peut plus difficilement résoudre par des méthodes arithmétiques. C'est pourquoi nous avons explicitement présenté des activités que nous avons intitulées « Introduction de la lettre » avec ses différentes fonctions et utilisé les notions de problèmes connectés et déconnectés (Bednarz et Janvier, 1996) pour élaborer des séances d'introduction aux équations.

> Problèmes connectés : « une relation peut être facilement établie entre deux données connues, introduisant alors un raisonnement possible de type arithmétique s'articulant sur les données connues du problème pour aboutir en fin de processus à la donnée inconnue »
> Problèmes déconnectés : « aucun pont ne peut être établi a priori directement entre les données

connues » (Bednarz et al. ibid)

3 – Favoriser les liens entre des textes en langage naturel, des expressions numériques et des représentations géométriques pour donner du sens à certaines expressions algébriques

Nous voulons mettre en avant la question des différents cadres ou registres de représentation sémiotique (Duval, 1993). Nous voulons ainsi attirer l'attention sur les problèmes posés par les activités de traitement dans les différents registres ou représentations (langue naturelle, écritures algébriques et dessins géométriques) et par celles de conversion. Or, souvent on pense que conversion signifie simple traduction, ce qui est faux et on sait bien que les élèves ont du mal à passer de la représentation d'un objet à une autre.

En considérant que l'algèbre est aussi un langage symbolique avec des règles spécifiques, nous souhaitons également travailler les deux aspects sens et dénotation d'une expression (Drouhard, 1992) au travers des formulations demandées.

A l'occasion de certains problèmes, nous apprenons aux élèves à désigner par une écriture symbolique (et nous institutionnalisons ces écritures) certaines propriétés des nombres : un nombre pair, un nombre divisible par 5, un nombre entier et son suivant, etc.

Enfin nous avons introduit une rubrique intitulée « Problèmes de synthèse » dans laquelle nous proposons des problèmes qui peuvent être résolus dans différents cadres, qui peuvent évoluer par un jeu sur les variables didactiques et donc qui peuvent être proposés à différents niveaux de classe.

4 - Travailler sur les vérifications qui donnent du sens aux notions

Comme nous l'avons déjà indiqué plus haut, ce point nous paraît extrêmement important et relativement nouveau dans sa prise en compte institutionnelle. Dans les programmes de collège depuis 2005, il est indiqué : *« contrôler ou anticiper des résultats par des calculs mentaux approchés».* Ici apparaît le terme « contrôle » qui, pour nous, englobe les vérifications. Dans le programme de la classe de 5^{e}, il apparaît : *« Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données ».*

Dans le programme de 4^{e}, on indique que *« le test d'une égalité par substitutions de valeurs numériques aux lettres prend tout son intérêt ».* Même si le terme vérifier n'est pas utilisé, nous pensons qu'il s'agit ici de faire une vérification des calculs littéraux. Enfin dans le programme de 2nde, il est encore indiqué *: « on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule ».*

Pour aller dans ce sens, nous avons élaboré des activités de calcul mental algébrique qui prennent en compte cette question de test d'égalité.

5 – Travailler sur la notion de formule qui prépare la notion de fonction

Par ce principe, nous voulons souligner que, d'une part le travail algébrique est une notion unificatrice du programme de collège et que d'autre part l'entrée dans l'algèbre ne se fait pas seulement en classe de 4^{e} même si, bien sûr, un travail important est fait durant cette année qui constitue un moment d'unification et de synthèse de notions déjà vues.

Pour les classes de 6^{e}/5^{e}, cela paraît moins évident. Or, selon nous, ce sont les formules qui peuvent faire ce lien. En effet, les élèves connaissent des formules depuis l'école primaire même si leur place a été réduite à l'école primaire depuis les années 1970, et encore davantage avec les programmes de 2002 puisque le formulaire pour les aires a été supprimé. Pour eux, c'est un procédé de calcul qui fournit un résultat numérique lorsqu'on affecte à la (ou aux) "lettre(s)" une ou des valeurs numériques. Nous pensons donc qu'à travers cela les élèves ont déjà rencontré l'idée de variable. Il nous semble donc important d'exploiter dans des exercices le lien avec les formules, soit en donnant des formules aux élèves et en faisant calculer et représenter graphiquement, soit en faisant établir des formules à partir de problèmes.

Nous avons d'ailleurs constaté dans les activités d'introduction de la lettre que les élèves utilisaient spontanément ce terme pour désigner les écritures produites soit pour établir une formule générale, soit pour produire une équation.

6 – Ne pas négliger la notion de preuve en algèbre

Comme nous l'avons précisé plus haut, il nous semble que les problèmes de preuve en algèbre sont assez peu présents dans les manuels et certainement dans les classes. Nous avons donc voulu écrire un principe explicite pour développer les problèmes amenant à prouver des résultats. Ainsi nous avons créé une rubrique sur le site portant sur les problèmes de preuve à proposer dans toutes les classes du collège.

7 – Ne pas négliger les justifications des calculs par l'utilisation de règles algébriques

Là encore ce principe vise à prendre en compte dans la pratique des professeurs la question des éléments théoriques qui permettent de justifier les calculs algébriques. Pour illustrer ce point, nous prendrons comme exemple la formule de la distributivité de la multiplication sur l'addition qui est introduite formellement en classe de 5^{e}, mais pour laquelle il n'y a que peu de types de tâches en lien. Elle risque donc d'être assez vite oubliée par les élèves puisqu'ils ne voient pas son utilité. Or, c'est elle qui permet de justifier toutes les règles de calcul littéral, de développement et de factorisation. Il revient donc au professeur de faire vivre cette formule pour qu'elle prenne tout son sens, c'est–à–dire autrement que pour faire des calculs de différentes façons (ce qui est essentiellement le cas actuellement).

Nous pensons que, contrairement à la géométrie où un travail important est fait pour exiger des justifications par des théorèmes, en algèbre, la question de la justification des règles de calcul n'est pas vraiment posée. En effet, on cherche à donner aux élèves des automatismes de calcul, ce qui est légitime. Or, un automatisme de calcul est fait pour être appliqué sans avoir à justifier les différentes étapes (c'est ce qui fait qu'il est rapide et performant). Mais on sait bien que pour contrôler les procédures de calcul, il est nécessaire d'avoir des éléments théoriques. On peut mettre en lien ce déficit de justification avec le développement des définitions d'objets paramathématiques que nous avons évoqués plus haut.

Un exemple de problème proposé

Nous donnons le texte en Annexe 2. Il s'agit d'une activité de preuve d'une formule générale. D'ailleurs dans les questions posées aux élèves nous utilisons bien ce terme. Nous avons veillé à faire trouver la formule générale par les élèves plutôt que de la donner, ce qui permet de favoriser l'écriture dans un registre symbolique (nous n'excluons pas la langue naturelle, mais ce serait complexe).

Cette activité a été réalisée en classe et nous avons pu ainsi nous rendre compte des difficultés des élèves, notamment en ce qui concerne la désignation d'un nombre et son suivant. En revanche, les élèves ont bien accepté le fait de prouver cette formule et ne se sont pas contentés de quelques exemples. Un autre point difficile pour les élèves a été le calcul sur les fractions qui a été un obstacle au passage à l'écriture de la formule.

Nous pensons qu'il est important de donner à voir ces commentaires au professeur qui souhaite proposer ce problème à sa classe pour qu'il comprenne dans quel esprit nous lui proposons ce travail et pour lui permettre d'anticiper les réactions des élèves en restant ouvert à différentes procédures. Ainsi, nous pensons que donner à voir des réponses ou des procédures d'élèves (éventuellement commentées) devrait permettre aux professeurs de changer leur regard sur les apprentissages des élèves. De même, donner aussi des éléments de gestion de classe (temps, organisation de la classe, synthèse) doit permettre de garder la cohérence entre le travail attendu des élèves et les modalités choisies par le professeur. Nous faisons l'hypothèse forte que ces informations sont essentielles pour l'appropriation des activités proposées et, à plus long terme, pour la formation continue des professeurs.

À noter également que nous proposons une synthèse qui indique les connaissances décontextualisées qui peuvent être mises en avant à partir de ce problème singulier.

Enfin nous tentons, quand c'est possible, de proposer des prolongements afin d'enrichir les problèmes, de faire des liens entre différentes notions, plutôt que de travailler uniquement un type de tâches.

CONCLUSION

Nous avons présenté ce site pour les professeurs ou les formateurs, et nous sommes bien consciente que ce n'est que le début d'un travail. Pour le moment, ce site et son architecture sont en évolution à la fois pour les rubriques et pour les activités proposées. Une première conclusion est que la création d'un site et son alimentation demandent un travail très important et des moyens pour les professeurs impliqués. De plus, comme nous avons fait le choix d'expérimenter tous les problèmes, nous sommes tributaires de contraintes institutionnelles comme les programmes et le temps d'enseignement.

Le travail autour de ce site ouvre des questions de recherche sur la nature des documents à proposer pour une véritable appropriation non seulement des documents pour la classe mais aussi des références théoriques sur les apprentissages et sur l'enseignement de l'algèbre. Nous faisons l'hypothèse que travailler à la fois sur les activités de classe et sur des éléments théoriques est une façon de participer à la formation continue des professeurs. Une autre question concerne le niveau de description et d'explicitation des séances de classe : jusqu'où doit-on aller dans la description des problèmes, le détail des consignes, les documents des élèves ? Bref, que doivent contenir les scénarios proposés pour être utilisés ?

Notre réflexion actuelle oriente notre travail vers la production de types de problèmes plutôt que d'une multitude de problèmes isolés. Ainsi, l'idée serait de travailler à partir des problèmes déjà sur le site pour, d'une part, les enrichir, en créer d'autres par un jeu sur les variables, sur les registres, sur les consignes données, les mettre en lien, et d'autre part, affiner, modifier les principes pour amorcer une réflexion chez les professeurs qui utilisent les documents pour qu'ils puissent ensuite eux-mêmes en produire d'autres.

Enfin, nous pensons faire une étude sur la façon dont les professeurs s'approprient ces documents. Est-ce une simple appropriation ou un vrai travail de formation ? Dans ce cas, faut-il organiser des séances de formation en parallèle pour compléter, approfondir ? Quel travail faire avec, contre, sans les manuels ? Est-ce que le travail autour des séances d'algèbre au collège peut avoir des effets dans d'autres champs de connaissances ?

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Behr, M., Erlwanger, S. & Nichols, E. (1980). How children view the equals sign. *Mathematics Teaching*, **Vol 92,** 13-15.

Bednarz, N. & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool : continuities and discontinuities with arithmetic. In : Sutherland, R. (ed). *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Betton, S. & Coppé, S. (2005). Favoriser l'activité mathématique dans la classe : ouvrir les problèmes. *Bulletin de l'association des professeurs de mathématiques de l'enseignement public* **461,** 733-748.

Booth, L. (1985). Erreurs et incompréhensions en algèbre élémentaire. *Petit x*, **5**, 5-17.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* **vol 7/2,** 33-116. Grenoble : La Pensée Sauvage Editions.

Chalancon, F., Coppé, S. & Pascal, N. (2002). Les vérifications dans les équations, inéquations et en calcul littéral. Grenoble : *Petit x* **59,** 23-41.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble : La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1985 bis). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. Grenoble : *Petit x* **5,** 51-94.

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Grenoble : *Petit x* **19,**.43-75.

Chevallard, Y. (1990). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Troisième partie. Grenoble : *Petit x* **30,** 5-38.

Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche Anthropologique. La notion d'organisation praxéologique. *Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques*. 119-140. Actes de l'Université d'été de didactique de La Rochelle.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. Recherche en didactique des mathématiques **vol 19/ 2,** 221-266. Grenoble : La Pensée sauvage.

Combier, G., Guillaume, J. C. & Pressiat, A. (1996). Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre. INRP.

Coppé, S. (1993). Processus de vérification en mathématiques chez les élèves de première scientifique en situation de devoir surveillé. Thèse de l'Université Claude Bernard. Lyon I..

Coppé, S. (2007). Les connaissances antérieures des professeurs de mathématiques à travers la préparation de séances de classe. Cas de stagiaires en fin de formation initiale. Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. Paris Janvier 2006, 139-168. Paris : IREM de Paris 7.

Coulange, L. (1997). Les problèmes "concrets" à mettre en équation dans l'enseignement. Grenoble : *Petit x* **47**, 33-58.

Coulange, L. (2000). Etude des pratiques du professeur du double point de vue écologique et économique. Cas de l'enseignement des systèmes d'équations et de la mise en équations en classe de troisième. Thèse de l'Université de Grenoble.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*. **Vol. 7/2**, 5-31. Grenoble : La pensée sauvage.

Drouhard, J. P. (1992). Les écritures symboliques de l'algèbre élémentaire. Thèse de l'Université de Paris 7.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Strasbourg : *Annales de didactique et de Science Cognitives* **5,** 37-65.

El Mouhayar, R. (2007). Etude des pratiques d'enseignement des mathématiques au niveau de l'école moyenne (11-15) dans le cas de l'algèbre en France et au Liban. Thèse de l'Université Lumière Lyon 2.

Gascon, J. (1993). Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternance à « l'arithmétique généralisée ». Grenoble : *Petit x* **37,** 43-63.

Gueudet, G. & Trouche, L. (à paraître). Vers de nouveaux systèmes documentaires des professeurs de mathématiques. *Actes de la 14ème école d'eté de didactique.*

Grugeon, B. (1995). Étude des rapports institutionnels et des rapports personnels des élèves à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement : BEP et Première G. Thèse de l'Université de Paris VII.

Kieran, C. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. In *Mathematics and cognition. A research synthesis by the international group for the psychology of mathematics education.* P. Nesher et J. Kilpatrick Edits. Cambridge University Press.

Kirshner D, & Awtry, T. (2004). Visual Salience of algebraic transformations. *Journal for research in mathematics Education*, **Vol 35/4**, 224-237.

Robert, A. (2001). Les recherches sur les pratiques des enseignants et les contraintes de l'exercice du métier d'enseignant. *Recherche en didactique des mathématiques* **vol 21/1.2,** 57-80. Grenoble : La Pensée Sauvage Éditions.

Robert, A. & Rogalski, M. (2004). Problèmes d'introduction et autres problèmes de recherche au lycée. *Repère IREM* **54**.

Schmidt, S. (1996). La résolution de problèmes, un lieu privilégié pour une articulation fructueuse entre arithmétique et algèbre. *Revue des sciences de l'éducation* **vol XXII, n° 2**.

Schmidt, S., & Bednarz, N. (1997). Raisonnements arithmétiques et algébriques dans un contexte de résolution de problèmes : Difficultés rencontrées par les futures enseignants. *Educational studies in mathematics*, **vol 32/2**.

Shulmann, L.S. (1986). Those who understand : knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 2.

Vergnaud, G. (1988). Long terme et court terme dans l'apprentissage de l'algèbre. In *Actes du colloque franco-allemand de didactique des mathématiques et de l'informatique.* Textes réunis par C. Laborde. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Vergnaud, G. (1989). Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. In *Construction des savoirs. Obstacles et conflits*. N. Bednarz et C. Garnier Edits. CIRADE.

ANNEXE 1

Quelques éléments qui fondent les choix de situations d'introduction de l'algèbre au collège et en classe de seconde.

1 - Proposer aux élèves des problèmes dans lesquels l'emploi des lettres (ou autre symbole) paraît sinon indispensable mais utile, performant pour résoudre le problème.

Ce premier principe n'est pas spécifique de l'algèbre. En effet depuis trente ans, en s'appuyant sur les travaux de Piaget, de Bachelard et de Vigotsky, les recherches en didactique des mathématiques mettent en avant la notion de problèmes. Ainsi, ces recherches se fondent sur l'idée, que l'on construit ses connaissances en résolvant des problèmes pour lesquels nos connaissances anciennes se révèlent insuffisantes ou inadaptées et nécessitent la création de nouveaux outils qui seront, à leur tour, transformés en objets de connaissance dans le cadre de l'enseignement.

Nous pensons que ce jeu entre connaissances anciennes et nouvelles et entre le statut d'outil pour résoudre des problèmes et d'objet de connaissances est à la base de notre enseignement.

Pour l'algèbre, nous pouvons traduire de façon plus concrète cette première position théorique : il nous semble important de proposer aux élèves des problèmes qui nécessitent l'emploi de lettres non pas parce que le professeur le demande mais parce que cela aide à la résolution du problème ou bien cela permet de résoudre une série de problèmes semblables du point de vue de la structure mathématique.

Ces problèmes peuvent déboucher soit sur une résolution d'équation soit sur l'introduction du calcul littéral. Ainsi nous pensons que, pour l'élève, la lettre n'apparaîtra pas seulement comme une écriture, un symbole qui remplace un nombre, et que le professeur ne désigne plus par une écriture numérique, mais qu'elle apparaîtra plus rapidement comme une variable (ou une inconnue). Nous voulons montrer aux élèves que la lettre ne remplace pas seulement un nombre singulier, mais tout un ensemble de nombres.

2 – Ne pas désigner trop tôt les quantités inconnues ou variables par une (ou des) lettre(s). Laisser les élèves ressentir la nécessité de leur introduction plutôt que de les donner a priori.

Ce principe constitue la suite du principe précédent. Ceci est particulièrement vrai dans le cas des équations et dans le cas des fonctions.

L'analyse des manuels montre que la plupart des exercices imposent à l'élève l'emploi des lettres sans que cela soit indispensable pour lui, compte-tenu de ses connaissances mathématiques à ce moment-là. Dans ce cas, nous pensons que l'élève va utiliser une lettre (par exemple, pour mettre en équation) sans voir l'utilité de cette résolution par les équations (en fait il pourrait résoudre le problème par une autre méthode aussi efficace).

De plus, si l'on veut montrer à l'élève la puissance du raisonnement algébrique, il est important de lui donner des problèmes qu'il a du mal à résoudre par d'autres méthodes, arithmétiques, par exemple.

Il est donc important de connaître les spécificités et les différences entre le raisonnement algébrique et le raisonnement arithmétique.

3 – Favoriser les liens entre des textes en langage naturel, des expressions numériques et des représentations géométriques pour donner du sens à certaines expressions algébriques

L'algèbre permet de modéliser des problèmes mais c'est aussi un langage symbolique avec des règles spécifiques.

R. Duval définit et utilise la notion de registre sémiotique. Ainsi un objet (mathématique pour nous) peut être représenté dans différents registres (décrit en langue naturelle, illustré par un dessin, défini dans un langage symbolique). Chaque registre permet de travailler sur l'objet d'une façon particulière associée à ce registre, mais l'objet n'est jamais la somme de ses représentations dans les divers registres.

Un exemple assez simple est celui des fonctions : ainsi on peut définir une fonction à l'aide d'une phrase en langue naturelle (ex la vitesse est fonction du temps) à l'aide d'une formule algébrique, d'une courbe, d'un tableau de valeurs, d'un graphe, etc. Or, ces registres ne sont pas tous équivalents et nous ne pouvons pas travailler de la même façon dans chacun.

En ce qui concerne l'algèbre, nous pensons qu'il est important de trouver des activités qui vont permettre de travailler les passages entre la langue naturelle, les écritures algébriques et les dessins géométriques.

4 - Travailler sur les vérifications qui donnent du sens aux notions

Ce point nous paraît extrêmement important : dans les programmes de collège, classe de $6^{ème}$, il est indiqué : *"fournir aux élèves aussi souvent que possible, des occasions de contrôle de leurs résultats"* avec un exemple : *"contrôler des calculs à la machine par des calculs mentaux approchés."* Ici apparaît le terme "contrôle" qui, pour nous, englobe les vérifications.

Dans le programme de $5^{ième}$, *"Tester si une égalité comportant un ou deux nombres indéterminés est vraie lorsqu'on leur attribue des valeurs numériques données"*.

Nous interprétons cette injonction de deux façons : inciter les élèves à vérifier, et leur faire rencontre la notion de variable.

En effet, en testant une égalité, c'est–à-dire en remplaçant la (les) "lettre(s)" par des nombres et en répétant cette opération pour plusieurs nombres, on indique à l'élève que cette lettre représente bien un nombre qui varie et qu'alors la phrase mathématique obtenue est vraie ou fausse. Il y a donc là un double travail tout à fait important pour favoriser la compréhension des élèves et leur entrée dans l'algébrique. Il nous semble tout à fait important que le professeur mette en place dans la classe des types d'exercices qui favorisent ce lien.

Dans le programme de $4^{ième}$, on reprend la même phrase et il est stipulé que l'élève doit *"savoir tester un développement ou une factorisation d'une expression littérale par des substitutions de valeurs numériques à la variable en jeu."* Même si le terme vérifier n'est pas utilisé, nous pensons qu'il s'agit ici de faire une vérification des calculs littéraux.

Dans le programme de 2^{nde}, il est encore indiqué *"on explicitera quelques procédures simples permettant d'infirmer ou de confirmer une formule"*.

5 – Travailler sur la notion de formule qui prépare la notion de fonction

Nous pensons que le travail algébrique est une notion unificatrice du programme de collège. Ainsi, l'étude des programmes montre que l'entrée dans l'algèbre ne se fait pas seulement en classe de $4^{ème}$ même si, bien sûr, un travail important est fait durant cette année qui constitue un moment d'unification et de synthèse de notions déjà vues. Les liens avec la classe de troisième sont certainement faits par les notions de développement/factorisation et par équations/inéquations.

Pour les classes de $6^{ème}/5^{ème}$, cela paraît moins évident. Or, pour nous, ce qui fait un lien ce sont les formules. En effet, les élèves connaissent des formules depuis l'école primaire (même si leur place a été réduite à l'école primaire depuis les années 1970 (et encore davantage avec les programmes de 2002 puisque le formulaire pour les aires a été supprimé) les élèves voient et utilisent des formules, notamment de périmètre et d'aire pour le rectangle et le cercle/disque.

Pour eux c'est un procédé de calcul qui fournit un résultat numérique lorsqu'on affecte à la (ou aux) "lettre(s)" une ou des valeur(s) numériques. Donc nous pensons qu'à travers cela les élèves ont déjà rencontré l'idée de variable. Il nous semble donc important d'exploiter, dans des exercices le lien avec les formules :

en donnant des formules aux élèves et en faisant calculer et représenter graphiquement

en faisant établir des formules à partir de problèmes.

6 – Ne pas négliger la notion de preuve en algèbre

Si nous adhérons au point de vue précédent, nous pensons également qu'il faut proposer des types de tâches donnant à voir, à prouver des égalités vraies pour tout x dans un ensemble de nombres. Ainsi nous pensons que les activités de preuve par l'outil algébrique sont des types de tâches qui vont permettre à l'élève tout d'abord de faire des conjectures en utilisant la lettre comme remplaçant n'importe quel nombre d'un ensemble donné. Puis de prouver ces conjectures en utilisant les règles du calcul algébrique qui fonctionneront bien alors comme des théorèmes avec le même statut qu'en géométrie.

En effet, il est étonnant de constater qu'un travail didactique important est fait pour les démonstrations en géométrie, en exigeant notamment l'énoncé explicite des théorèmes ; or ce travail n'est pas repris en algèbre comme si les règles, les théorèmes étaient alors moins importants ou comme si le calcul fonctionnait sans règles.

Bien sûr, nous touchons là un point important qui concerne les automatismes de calcul. D'une part, il est important que les élèves acquièrent des automatismes de calcul qui leur permettent de faire des calculs rapidement sans avoir à citer les règles : c'est le propre des automatismes. Mais d'autre part, on peut penser que durant l'apprentissage des règles du calcul algébrique, le professeur porte une attention particulière à la justification des calculs par les règles.

7 – Ne pas négliger les justifications des calculs par l'utilisation de règles algébriques

Reprendrons comme exemple la formule de la distributivité qui est introduite formellement en $5^{ème}$ mais pour laquelle il n'y a que peu de types de tâches en lien et qui est donc assez vite oubliée par les élèves puisqu'ils ne voient pas son utilité. Or, c'est elle qui permet de justifier toutes les règles de calcul littéral, de développement et de factorisation. Il revient donc au professeur de faire vivre cette formule pour qu'elle prenne tout son sens, c'est–à–dire autrement que pour faire des calculs de différentes façons.

Il est donc tout à fait important que des exercices dans lesquels cette formule fonctionne comme une règle soient proposés aux élèves.

Nous pensons que, contrairement à la géométrie où un travail important est fait pour exiger des justifications par des théorèmes, en algèbre la question de la justification des règles de calcul n'est pas vraiment posée. En effet, en algèbre, on cherche à donner aux élèves des automatismes de calcul, ce qui est légitime. Or un automatisme de calcul est fait pour être appliqué sans avoir à justifier les différentes étapes (c'est ce qui fait qu'il est rapide et performant). Mais au début de l'apprentissage, il nous semble important de bien faire comprendre aux élèves que la propriété de distributivité doit fonctionner comme un théorème c'est-à-dire avec des conditions d'application. Il nous semble donc important de travailler avec les élèves de $5^{ème}$ et $4^{ème}$ les justifications des calculs.

ANNEXE 2

Activité 3
Etablir une formule de calcul

On donne les calculs suivants à faire.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} =$

$\frac{1}{4} - \frac{1}{5} =$

Ces calculs semblent tous faits sur le même modèle. Pouvez-vous trouver lequel ? Pouvez-vous établir une formule qui rende compte de ce que vous avez constaté et la prouver?

But de cette activité par rapport aux principes

- **1 -Montrer l'intérêt et la nécessité, de trouver une formule dans laquelle une lettre est introduite pour établir une formule.**
- **2 – Ne pas désigner trop les quantités variables par une lettre, laisser aux élèves ressentir la nécessité de leur introduction.**
- **4- Travailler sur les vérifications**
- **5 - Travailler sur les formules**
- **6 – Etablir des preuves en algèbre**

Durée : une séance d'une demi- heure
Les élèves travaillent seuls pendant 5 à 10 minutes.
Ils doivent faire les calculs proposés, se rendre compte de leur liens, puis trouver une formule qui rend compte de ces remarques. Les calculatrices sont autorisées. Le professeur passe auprès de chacun. Il peut ainsi voir les formules produites.

Mise en commun au tableau et discussion sur les formules produites.
Plusieurs objectifs pour ce moment :

- Faire des calculs avec des fractions simples qui n'ont pas le même dénominateur.
- Trouver la formule, savoir l'exprimer avec une seule lettre.
- Distinguer les formules vraies ou fausses par vérification avec premiers calculs faits.

Institutionnalisation.

Avec des lettres on peut écrire une formule générale et la prouver. On peut calculer avec des lettres comme avec des nombres puisque ici elles remplacent n'importe quel nombre. Deux nombres consécutifs peuvent s'écrire a et a+ 1

Analyse de cette activité

Il s'agit de faire trouver une formule à partir d'exemples. On est ici dans une activité de généralisation et de preuve. En ce sens, cette activité est différente de l'activité 2.

Les premiers calculs ont pour but de faire rentrer dans l'activité mais aussi de servir de modèle à l'énoncé de la formule.
Ce qui est difficile pour les élèves, c'est de traduire ce qu'ils constatent par une formule. Ainsi nous avons pu constater qu'il utilisaient spontanément des lettres, mais qu'ils avaient du mal à traduire (ou qu'ils ne voyaient pas) les nombres consécutifs alors que le produit du second membre était bien perçu. Ainsi les premières formules produites étaient souvent du type :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{ab}$$

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{c} = \frac{a}{bc}$$

Ce qui pourrait être correct avec c = b+1, mais qui ne correspond pas à cet énoncé.
La difficulté pour le professeur est donc de faire évoluer ces formules vers celles qui mettent en avant la relation entre a et b. On travaille donc ici sur la désignation de deux nombres consécutifs.

Prolongements :
Généralisation de la formule à :

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+1} = \frac{a}{b(b+1)}$$